

УДК 514.76

СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ ПОЧТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

О.В. Сухова

Аннотация

Изучается класс римановых метрик \tilde{g} на касательном расслоении TM риманова многообразия (M, g) , содержащий, в частности, метрики Сасаки и Чигера – Громола. В случае, когда (M, g) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны k , найдены условия, при которых скалярная кривизна \tilde{S} касательного расслоения (TM, \tilde{g}) является постоянной.

Ключевые слова: (структура почти произведения, касательное расслоение, риманова метрика, секционная кривизна, скалярная кривизна.)

1. Пусть M – гладкое n -мерное многообразие, g – риманова метрика на M , ∇ – связность Леви – Чивита, $\pi : TM \rightarrow M$ – касательное расслоение над M . Связность ∇ определяет горизонтальное распределение $H : y \in TM \rightarrow H_y \subset T_y(TM)$ и, следовательно, структуру почти произведения на TM : $T_y(TM) = H_y \oplus V_y$, где $V : y \in TM \rightarrow V_y \subset T_y(TM)$ – вертикальное распределение, касающееся слоев. Определим на TM риманову метрику \tilde{g} следующим образом. Достаточно определить значения метрики \tilde{g} от векторных полей на TM , являющихся вертикальными и горизонтальными лифтами векторных полей на базе M :

$$\tilde{g}_y(X_y^h, Y_y^h) = g_{\pi(y)}(X_{\pi(y)}, Y_{\pi(y)}), \quad \tilde{g}(X_y^h, Y_y^v) = \tilde{g}(X_y^v, Y_y^h) = 0,$$

$$\tilde{g}_y(X_y^v, Y_y^v) = \varphi(z)g_{\pi(y)}(X_{\pi(y)}, Y_{\pi(y)}) + \psi(z)g_{\pi(y)}(X, y)g_{\pi(y)}(Y, y),$$

где φ и ψ – некоторые вещественные функции аргумента $z = \frac{1}{2}\|y\|^2 = \frac{1}{2}g_{\pi(y)}(y, y)$ такие, что $\varphi(z) > 0$ и $\varphi(z) + 2z\psi(z) > 0$; X^h, Y^h и X^v, Y^v – соответственно горизонтальные и вертикальные лифты векторных полей X, Y с базы на касательное расслоение в связности ∇ . Очевидно, что метрика \tilde{g} является римановой метрикой структуры почти произведения.

Далее для отличия объектов, заданных на базе, от объектов, заданных на касательном расслоении, будем использовать для последних символ « \sim ». Будем также обозначать символом \langle, \rangle метрику g или метрику \tilde{g} в зависимости от того, векторные поля базы или касательного расслоения указаны в качестве аргументов.

2. Секционная кривизна касательного расслоения TM с метрикой \tilde{g} в 2-мерном направлении, определяемом в каждой точке значениями векторных полей \tilde{X} и \tilde{Y} , вычисляется по известной формуле:

$$\tilde{K}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{\langle \tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Y}, \tilde{X} \rangle}{\tilde{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y})}, \quad (1)$$

где \tilde{R} – тензор кривизны пространства (TM, \tilde{g}) , $\tilde{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Y} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle^2$ – определитель Грама.

Вычисляя связность Леви–Чивита и тензор кривизны метрики \tilde{g} , из (1) находим:

$$\tilde{K}(X^h, Y^h) = K(X, Y)^v - \frac{3\varphi}{4} \cdot \frac{\|R(X, Y)y\|^2}{Q(X, Y)^v}, \quad (2)$$

$$\tilde{K}(X^h, Y^v) = \frac{\varphi^2}{4} \cdot \frac{\|R(y, Y)X\|^2}{\|X\|^2(\varphi\|Y\|^2 + \psi\langle Y, y \rangle^2)}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X^v, Y^v) = & \frac{3\varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}{4\varphi^2\psi} - \frac{(2\varphi'\psi - \varphi\psi')(\varphi + z\varphi')}{2\varphi^2\psi(\varphi + 2z\psi)} + \\ & + \left(\frac{2\varphi\varphi'' - 3\varphi'^2}{4\psi} + \frac{\varphi(2\psi^2 - \varphi\psi' - z\varphi'\psi') + z\varphi'^2\psi}{2\psi(\varphi + 2z\psi)} \right) \times \\ & \times \frac{Q(X, Y)^v}{\varphi^2 Q(X, Y)^v + \varphi\psi(\|X\|^2\langle Y, y \rangle^2 - 2\langle X, Y \rangle\langle X, y \rangle\langle Y, y \rangle + \|Y\|^2\langle X, y \rangle^2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Построим в точке $y \in TM$ ортонормированный относительно метрики \tilde{g} репер $\{\tilde{e}_I\} = \{\tilde{e}_i, \tilde{e}_{i^*}\}$, состоящий из лифтов векторов репера $\left\{e_1 = \frac{y}{\|y\|}, e_2, \dots, e_n\right\}$, заданного в точке $x = \pi(y) \in M$ и ортонормированного относительно метрики g . Положим

$$\tilde{e}_i = e_i^h, \quad \tilde{e}_{1^*} = \frac{e_1^v}{\sqrt{\varphi + 2z\psi}}, \quad \tilde{e}_{p^*} = \frac{e_p^v}{\sqrt{\varphi}}, \quad p = 2, \dots, n.$$

Используя полученные равенства (2)–(4), вычислим секционные кривизны \tilde{K}_{IJ} вдоль 2-мерных направлений, определяемых парами векторов репера $\{\tilde{e}_I\}$. Имеем:

$$\tilde{K}_{ij} = K_{ij} - \frac{3\varphi}{4} \|R(e_i, e_j)y\|^2, \quad i \neq j, \quad (5)$$

$$\tilde{K}_{i1^*} = 0, \quad \tilde{K}_{ip^*} = \frac{\varphi}{4} \|R(y, e_p)e_i\|^2, \quad (6)$$

$$\tilde{K}_{1^*p^*} = -\frac{\varphi''z + \varphi'}{\varphi(\varphi + 2z\psi)} + \frac{z\varphi'^2(\varphi + z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi + z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi + 2z\psi)^2}, \quad (7)$$

$$\tilde{K}_{p^*q^*} = \frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{2\varphi^2(\varphi + 2z\psi)}, \quad p \neq q, \quad (8)$$

где K_{ij} – секционная кривизна базы (M, g) вдоль 2-мерного направления, определяемого векторами e_i, e_j ортонормированного базиса $\{e_i\}$ касательного пространства $T_x M$. Анализируя полученные равенства (5)–(8), приходим к следующему результату:

Теорема 1. Среди пространств (TM, \tilde{g}) нет пространств постоянной ненулевой секционной кривизны.

Скалярная кривизна \tilde{S} многообразия TM в точке $y \in TM$ может быть вычислена как сумма секционных кривизн \tilde{K}_{IJ} :

$$\tilde{S} = 2 \sum_{i < j} \tilde{K}_{ij} + \sum_{i, j^*} \tilde{K}_{ij^*} + 2 \sum_{i^* < j^*} \tilde{K}_{i^*j^*}.$$

В соответствии с (5)–(8) находим:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(y) = S(\pi(y)) - \frac{3\varphi}{2} \sum_{i < j} \|R(e_i, e_j)y\|^2 + \frac{\varphi}{2} \sum_{i,p} \|R(y, e_p)e_i\|^2 + \\ + 2(n-1) \left\{ -\frac{\varphi''z + \varphi'}{\varphi(\varphi + 2z\psi)} + \frac{z\varphi'^2(\varphi + z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi + z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi + 2z\psi)^2} + \right. \\ \left. + (n-2) \frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{4\varphi^2(\varphi + 2z\psi)} \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

где S – скалярная кривизна риманова многообразия (M, g) .

4. Пусть риманово многообразие (M, g) имеет постоянную секционную кривизну k . Тогда

$$R(X, Y)Z = k(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y), \quad S = k \cdot n(n-1).$$

Вычисляя в этом случае все суммы правой части равенства (9), получаем формулу, выражающую зависимость скалярной кривизны \tilde{S} касательного расслоения с метрикой \tilde{g} от кривизны k , размерности n базы и функций φ и ψ :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(y) = n(n-1)k - \varphi z(n-1) \cdot k^2 + \\ + 2(n-1) \left\{ \frac{z\varphi'^2(\varphi + z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi + z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi + 2z\psi)^2} - \frac{\varphi''z + \varphi'}{\varphi(\varphi + 2z\psi)} \right\} + \\ + (n-1)(n-2) \frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{2\varphi^2(\varphi + 2z\psi)}. \quad (10) \end{aligned}$$

Выясним, в каком случае $\tilde{S} = \text{const}$. Из (10) следует, что для того чтобы скалярная кривизна касательного расслоения с метрикой \tilde{g} была величиной постоянной, достаточно выполнения условий:

$$\varphi(z) \cdot z = c_1, \quad (11)$$

$$\frac{z\varphi'^2(\varphi + z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi + z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi + 2z\psi)^2} - \frac{\varphi''z + \varphi'}{\varphi(\varphi + 2z\psi)} = c_2, \quad (12)$$

$$\frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{2\varphi^2(\varphi + 2z\psi)} = c_3. \quad (13)$$

где c_1, c_2, c_3 – некоторые постоянные, $c_1 \neq 0$. Из требования (11), учитывая, что $\varphi > 0$, находим: $\varphi(z) = a^2/z$, где $a = \text{const} \neq 0$. Нетрудно проверить, что условия (12), (13) в этом случае также выполняются, поэтому имеет место

Теорема 2. Если риманово многообразие (M, g) является пространством постоянной секционной кривизны k , а функции φ и ψ таковы, что $\varphi(z) = a^2/z$ ($a = \text{const} \neq 0$), $\varphi(z) + 2z\psi(z) > 0$, то касательное расслоение TM с метрикой \tilde{g} имеет постоянную скалярную кривизну

$$\tilde{S} = (n-1) \left(-a^2k^2 + nk + \frac{1}{2a^2}(n-2) \right).$$

5. Пусть (M, g) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны k . Рассмотрим промежутки знакопостоянства скалярной кривизны касательного расслоения \tilde{S} для некоторых частных случаев метрик \tilde{g} исследуемого класса.

Пусть \tilde{g} – метрика Сасаки ($\varphi = 1, \psi = 0$) [1].

Согласно (10) скалярная кривизна \tilde{S} пространства (TM, \tilde{g}) определяется равенством

$$\tilde{S} = n(n-1)k - z(n-1)k^2.$$

Исследуя знак скалярной кривизны \tilde{S} как функции аргументов $(z, k) \in D = (0, +\infty) \times R$, приходим к следующему результату.

Если (M, g) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны k , \tilde{g} – метрика Сасаки, то скалярная кривизна \tilde{S} касательного расслоения (TM, \tilde{g}) отрицательна при $k < 0$, равна нулю при $k = 0$ и знакопеременна при $k > 0$.

При $\varphi(z) = \psi(z) = \frac{1}{1+2z}$ получаем метрику Чигера–Громола. Кривизны касательного расслоения с данной метрикой исследовались в работах [2, 3]. Скалярная кривизна \tilde{S} отрицательна при $k \in (-\infty, -3]$, положительна при $k \in (n - \sqrt{n^2 + 2n - 4}, n + \sqrt{n^2 + 2n - 4})$ и знакопеременна в остальных случаях.

При $\varphi(z) \equiv 1, \psi(z) = a^2/2z$ ($a = \text{const} \neq 0$) получаем метрику типа Чигера–Громола, рассмотренную в работе [4]. Доказано, что если $n = 2$, то скалярная кривизна касательного расслоения \tilde{S} отрицательна при $k < 0$, равна нулю при $k = 0$ и знакопеременна при $k > 0$. Если $n \geq 3$, то скалярная кривизна \tilde{S} положительна при $k = 0$ и знакопеременна в остальных случаях.

Пусть $\varphi(z) = a^2/z, \psi(z) \neq c^2/z^2$, где a, c – отличные от нуля константы. В этом случае, как было показано в п. 4, касательное расслоение с метрикой \tilde{g} имеет постоянную скалярную кривизну. Из (10) находим:

$$\tilde{S} = (n-1) \left(-a^2k^2 + nk + \frac{1}{2a^2}(n-2) \right).$$

Исследуя знак скалярной кривизны \tilde{S} как функции аргумента $k \in R$, приходим к следующему результату.

Теорема 3. Пусть (M, g) – риманово многообразие размерности $n \geq 2$, имеющее постоянную секционную кривизну k . Если функции φ и ψ таковы, что $\varphi(z) = a^2/z$, ($a = \text{const} \neq 0$), $\varphi(z) + 2z\psi(z) > 0$, то для скалярной кривизны \tilde{S} пространства (TM, \tilde{g}) справедливы следующие утверждения:

- 1) $\tilde{S} > 0$ при $k \in \left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2}, \frac{n + \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2} \right)$;
- 2) $\tilde{S} = 0$ при $k = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2}$;
- 3) $\tilde{S} < 0$ при $k \in \left(-\infty, \frac{n - \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2} \right) \cup \left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2}, +\infty \right)$.

Пусть $\varphi \equiv 1, \psi \equiv c$, где $c = \text{const} > 0$. В этом случае, согласно (10), скалярная кривизна \tilde{S} пространства (TM, \tilde{g}) определяется равенством

$$\tilde{S} = n(n-1)k - z(n-1)k^2 + 2(n-1)\frac{c}{(1+2zc)^2} + (n-1)(n-2)\frac{c}{1+2zc}.$$

Для $n \geq 2$ исследуем знак скалярной кривизны \tilde{S} как функции аргументов $(z, k) \in D = (0, +\infty) \times R$. График уравнения $\tilde{S}(z, k) = 0$ определяется в плоскости

(z, k) уравнением второго порядка относительно k :

$$-k^2 z + kn + \frac{c(n + 2nzc - 4zc)}{(1 + 2zc)^2} = 0,$$

дискриминант которого всегда положителен. Разрешая его относительно k , находим:

$$k_{1,2} = \frac{n(1 + 2zc) \pm \sqrt{n^2(1 + 2zc)^2 + 4zc(n + 2nzc - 4zc)}}{2z(1 + 2zc)}.$$

Анализируя поведение решений $k_1(z)$ и $k_2(z)$, заключаем, что $\tilde{S} < 0$ при $k \in (-\infty, -c]$ и знакопеременна при других значениях k . Таким образом, справедлива

Теорема 4. Пусть (M, g) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны k , $\varphi \equiv 1$, $\psi \equiv c$, где $c = \text{const} > 0$. Тогда скалярная кривизна \tilde{S} касательного расслоения (TM, \tilde{g}) отрицательна при $k \in (-\infty, -c]$, положительна при $k = 0$ и знакопеременна в остальных случаях.

Summary

O. V. Sukhova. The Scalar Curvature of the Tangent Bundle with Special Almost Product Metric.

We study a class of Riemannian metrics \tilde{g} on the tangent bundle TM of a Riemannian manifold (M, g) which contains, in particular, the Sasaki and the Cheeger – Gromoll metrics. In the case when (M, g) is a space of constant section curvature k , we find conditions under which the scalar curvature \tilde{S} of (TM, \tilde{g}) is constant.

Key words: almost product structure, tangent bundle, Riemannian metric, sectional curvature, scalar curvature.

Литература

1. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. – 1958. – V. 10, No 3. – P. 338–354.
2. *Sekizawa M.* Curvatures of Tangent Bundle with the Cheeger – Gromoll Metric // Tokyo J. Math. – 1991. – V. 14, No 2. – P. 407–417.
3. *Gudmundsson S., Kappos E.* On the geometry of the Tangent Bundle with the Cheeger – Gromoll Metric // Tokyo J. Math. – 2002. – V.25, No 1. – P. 75–83.
4. *Ширяев К.Б.* Связность и кривизна метрики типа Чигера–Громола на касательном расслоении гладкого многообразия // Движения в обобщенных пространствах: межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Пенз. гос. пед. ун-т, 2000. – С. 182–186.

Поступила в редакцию
28.08.09

Сухова Ольга Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского.

E-mail: *Suhova_o@list.ru*